Całka podwójna - zastosowania geometryczne

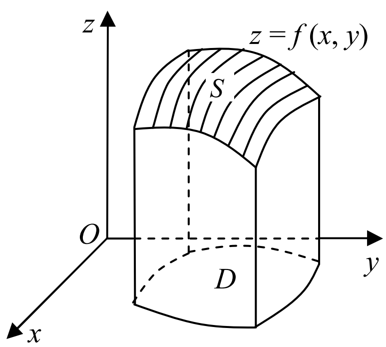
Podamy teraz kilka ważniejszych zastosowań geometrycznych całki podwójnej.

Objętość bryły

W materiałach "Całka podwójna 1 - wstęp" podaliśmy interpretację geometryczną całki podwójnej. Przypomnijmy:

(7) $$|V| = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

gdzie funkcja $f(x,y)$ jest nieujemna i ciągła w obszarze D, natomiast V jest obszarem przestrzennym (bryłą) ograniczonym od dołu płaszczyzną Oxy (podstawą bryły V jest obszar D), zaś od góry powierzchnią o równaniu $z = f(x,y)$, dla $(x,y) \in D$ (rys. 19).



Rys. 19

Powyższy wzór łatwo można uogólnić na sytuację, w której bryła jest od dołu i od góry ograniczona wykresami dwóch funkcji. Tym przypadkiem zajmiemy się jednak w materiałach dotyczących zastosowań geometrycznych całki potrójnej.

Pole obszaru płaskiego

Pole obszaru płaskiego D w płaszczyźnie Oxy można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

(8) $$|D| = \iint_D dxdy.$$

Pole płata powierzchniowego

Pole płata powierzchniowego S, który jest wycinkiem powierzchni o równaniu $z = f(x,y)$ otrzymanym dla $(x,y) \in D$ (rys. 19) wyraża się wzorem:

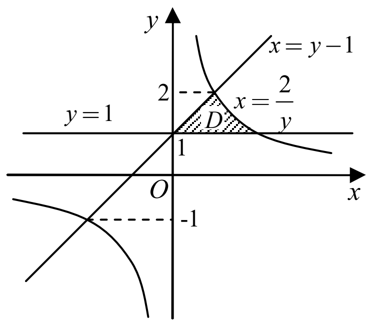
(9) $$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Przykład. Znaleźć pole obszaru płaskiego ograniczonego liniami:

$$y = \frac{2}{x}, \quad y = x + 1, \quad y = 1.$$

Rozwiązanie. Rysujemy obszar D (rys. 20). Widzimy, że w tym przykładzie wygodniej jest potraktować zakreślony obszar jako normalny względem osi Oy – aby obliczyć całkę podwójną nie trzeba będzie go wówczas dzielić na dwa obszary. Z równań danych krzywych wyznaczamy zatem zmienną x i rozwiązujemy (wystarczy ze względu na niewiadomą y) układ równań:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ x = y - 1 \end{cases}, \text{ stąd}$$



Rys. 20

$$\frac{2}{y} = y - 1 \ /\cdot y \quad \Leftrightarrow \quad 2 = y^2 - y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = -1, \ y_2 = 2.$$

Patrząc od strony osi Oy obszar D możemy zatem zapisać w postaci:

$$D=\left\{(x,y):1\le y\le 2,\ y-1\le x\le \frac{2}{y}\right\}.$$

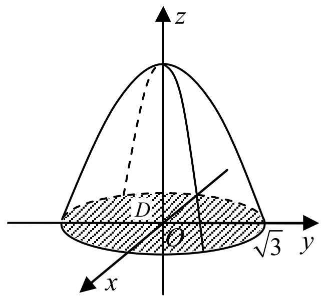
Przechodzimy do obliczenia pola obszaru D:

$$|D|=\iint_D dxdy=\int_1^2\left(\int_{y-1}^{\frac{2}{y}}dx\right)dy=\int_1^2[x]_{y-1}^{\frac{2}{y}}\,dy=\int_1^2\left(\frac{2}{y}-y+1\right)dy=$$

$$=\left[2\ln|y|-\frac{1}{2}y^2+y\right]_1^2=(2\ln 2-2+2)-\left(2\ln 1-\frac{1}{2}+1\right)=2\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Przykład. Obliczyć objętość obszaru przestrzennego V ograniczonego od góry powierzchnią $z=3-(x^2+y^2)$, a od dołu płaszczyzną $z=0$.

Rozwiązanie. Sporządzamy rysunek obszaru V (rys. 21). Równanie $z=3-(x^2+y^2)$ przedstawia paraboloidę. Jej wykres można otrzymać odbijając symetrycznie względem płaszczyzny Oxy wykres paraboloidy obrotowej $z=x^2+y^2$, a następnie przesuwając go o trzy jednostki do góry. W wyniku przekroju paraboloidy $z=3-(x^2+y^2)$ płaszczyzną $z=0$ otrzymamy (podstawiając $z=0$ do równania paraboloidy) okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $R=\sqrt{3}$. Zatem obszar D jest kołem, którego brzegiem jest wyznaczony przekrój. Aby obliczyć objętość obszaru V korzystamy ze wzoru (7) i otrzymujemy:



Rys. 21

$$|V|=\iint_D(3-x^2-y^2)dxdy.$$

Ponieważ obszar D jest kołem, to wprowadzamy współrzędne biegunowe. Łatwo stwierdzić, że gdy punkt $M(x,y)$ zmienia się w obszarze D, to jego współrzędne biegunowe spełniają warunki:

$$D':\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le\sqrt{3}\end{cases}.$$

Stąd

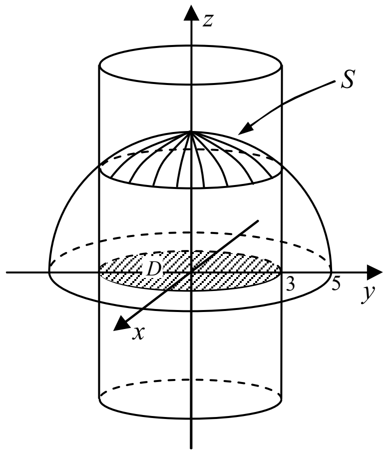
$$|V|=\iint_D(3-x^2-y^2)dxdy=\iint_{D'}(3-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\iint_{D'}(3-r^2)rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}(3r-r^3)\,dr\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{3}}d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)d\varphi=\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{9}{4}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{9}{4}\cdot 2\pi=\frac{9}{2}\pi.$$

Przykład. Obliczyć pole powierzchni górnej połowy sfery $x^2+y^2+z^2=25$ wyciętej walcem $x^2+y^2=9$.

Rozwiązanie. Ilustracją do przykładu jest rysunek 22, na którym przez S oznaczono płat powierzchniowy, którego pole powierzchni mamy obliczyć. Płat ten jest wycinkiem górnej połowy sfery, która jest wykresem funkcji o równaniu $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$. Z faktu, że interesujący nas fragment wycinamy walcem o równaniu $x^2+y^2=9$ wnioskujemy, że rzutem D płata S na płaszczyznę Oxy jest koło o promieniu $R=3$.



Rys. 22

Pole płata powierzchniowego S obliczymy ze wzoru (9). Wyznaczamy najpierw potrzebne pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$$

Stąd

$$|S|=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2-y^2}+\frac{y^2}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint_D\sqrt{\frac{25}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=5\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe obszar całkowania możemy zapisać w postaci

$$D'=\{(r,\varphi):\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 3\}.$$

Zatem

$$|S|=5\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}=5\iint_{D'}\frac{r}{\sqrt{25-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}}\,drd\varphi=$$

$$=5\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\frac{r}{\sqrt{25-r^2}}\,dr\right)d\varphi.$$

Wykonujemy pomocnicze obliczenia:

$$\int\frac{r}{\sqrt{25-r^2}}\,dr=\left|\begin{array}{l}25-r^2=t\\ -2rdr=dt\\ rdr=-\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{25-r^2}+C.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$|S|=5\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{25-r^2}\right]_0^3 d\varphi=5\int_0^{2\pi}(-4+5)d\varphi=5[\varphi]_0^{2\pi}=10\pi.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

23. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$,

24. $y = 1 - x^2$, $y = x^2$,

25. $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$, $(x, y > 0)$,

26. $x + y = 4$, $x + 3y = 1$, $x = y$, $x = 2y$,

27. $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2$.

Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

28. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 2$,

29. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(z \geq 0)$,

30. $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$,

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$.

Obliczyć pola części następujących powierzchni

32. płaszczyzny $x + y + z = 4$ wyciętej płaszczyznami: $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$

33. paraboloidy $z = x^2 + y^2$ wyciętej przez walec $x^2 + y^2 = 9$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch